早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Large Time Behavior of Solutions
of Initial-Boundary Value Problems
for Hamilton-Jacobi Equations

ハミルトン・ヤコビ方程式に対する
初期値・境界値問題の解の長時間挙動

申　請　者

三竹	大寿
Hiroyoshi	Mitake

数学応用数理専攻　非線形偏微分方程式研究

２００９年　２月

本論文では，ハミルトン・ヤコビ方程式の大域解についての著者による研究成果が述べられている．ハミルトン・ヤコビ方程式は力学，幾何光学，変分法，最適制御，微分ゲームなどの分野における基本方程式の一つとして重要であり，この方程式の研究は長い歴史を持つ．近年では，曲面の時間発展，画像処理などへの応用における展開もあり，さらに，1980 年代初頭における Michael G. Crandall と Pierre-Louis Lions による粘性解理論の導入を契機として活発に研究されている．

本論文は 3 章から構成される．第 1 章では粘性解理論が概説され，第 2 章では定常ハミルトン・ヤコビ方程式の解の表現公式が扱われ，第 3 章では，状態拘束条件下およびディリクレ境界条件下での非定常ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動が扱われている．

第 1 章では，本論文で用いられるハミルトン・ヤコビ方程式の弱解である粘性解について，その定義から始まって，第 2, 3 章で必要となる粘性解理論の基本事項が準備される．

第 2 章の内容について解説する．1 階の偏微分方程式ハミルトン・ヤコビ方程式の大域解に関する研究は Michael G. Crandall と Pierre-Louis Lions による粘性解の導入により本格化した．それ以前にも，1960 年代から Stanislav N. Kružkov や Avron Douglis によって半凹 (semi-concave) 関数の適当なクラスに属するような弱解の概念を使った研究がある．本章ではハミルトン・ヤコビ方程式の解の表現公式に関する研究成果が述べられている．粘性解を用いた研究では，Pierre-Louis Lions, Lawrence C. Evans，Panagiotis E. Souganidis などの研究で，最適制御や微分ゲームの値関数としての表現公式が確立された．また，Hopf-Lax-Oleinik の公式と呼ばれる非定常問題に対する解の公式もよく知られている．1990 年代の後半になって，Albert Fathi, Weinan E 等によって，力学系における Aubry-Mather 理論とハミルトン・ヤコビ方程式との関連についての研究が行われ，弱 KAM 理論が生まれ，Albert Fathi，Antonio Siconolfi 等により整理された．その成果の一つとして，ハミルトン・ヤコビ方程式の解の表現公式が新しく定式化された．これは，境界を持たないコンパクトで滑らかな多様体上のハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解を Aubry 集合上のデータにより記述するというものである．このような研究を受けて，本論文では n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の領域 Ω 上で定常ハミルトン・ヤコビ方程式を考察し，Aubry 集合と境界 $\partial\Omega$ 上における解の値をデータとする表現公式を確立している．ここで得られた表現公式を簡単な場合に述べてみる．Ω は有界な領域で，その境界が滑らかであるとして，ハミルトン・ヤコビ方程式

$$H(x, Du(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

を考える．ただし，H はハミルトニアンと呼ばれ，$\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上で定義された連続関数であり，Du は未知関数 u の勾配である．このハミルトン・ヤコビ方程式に対する Aubry 集合を $\mathcal{A}$ と表すとき，(1) の粘性解 u は

$$u(x) = \inf\{d(x,y) + u(y) \mid y \in \mathcal{A} \cup \partial\Omega\}$$

と表現されるというものである．ただし，

$$d(x,y) = \sup\{v(x) - v(y) \mid v \text{ は (1) の粘性劣解 }\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{A} = \{y \in \Omega \mid d(\cdot, y) \text{ は (1) の粘性解 }\} \tag{3}$$

と定義される．古典的な表現公式との大きな違いは，ディリクレ問題の解の一意性が成立しない場合をも対象とする点にあり，Aubry 集合の役割もこの点にある．境界 $\partial\Omega$ の正則性を全く仮定しないときには，解の $\partial\Omega$ の近傍での振舞いは複雑になる．また，非有界領域の場合には無限遠での解の振舞いが重要になる．これらを捉えるために，ポテンシャル論におけるような理想境界を導入して，そこでの境界値を定義し，一般の領域での解の表現公式の定式化に成功している．ここではハミルトニアン H に対する仮定として，凸性，強圧性を課している．このような表現公式は解の構造を明示的に与えるもので，ハミルトン・ヤコビ方程式の理論への重要な貢献といえる．この分野への理想境界などの斬新なアイディアの導入があり，新しい研究分野を切り拓くものといえる．

第 3 章の内容は以下のようなものである．非定常ハミルトン・ヤコビ方程式

$$u_t(x,t)+H(x,Du(x,t))=0 \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty) \tag{4}$$

の解の長時間挙動についての研究成果が与えられる．ここでは，Ω は有界な領域と仮定され，u_t は $\partial u/\partial t$ を表す．扱われている境界条件は，状態拘束条件と粘性解の意味でのディリクレ境界条件の二つの場合である．ハミルトニアン H に対して，狭義凸性と強圧性が仮定される．ハミルトン・ヤコビ方程式に対する長時間漸近挙動の研究は，対応する定常ハミルトン・ヤコビ方程式の解が一意に決まる場合には，Stanislav N. Kružkov, Pierre-Luois Lions, Guy Barles による古典的な結果が知られていたが，近年，弱 KAM 理論の登場と相俟って，Albert Fathi, Gawtum Namah, Jean-Michel Roquejoffre, Andrea Davini, Antonio Siconolfi, 藤田安啓，市原直幸，石井仁司などによって，ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間漸近挙動が活発に研究されている．しかしながら，本論文の扱う境界値問題に関する研究は少ない．ハミルトン・ヤコビ方程式 (4) に対する状態拘束問題は次の二つの不等式として記述される．

$$\begin{cases} u_t(x,t)+H(x,Du(x,t))\le 0 & \text{in } \Omega\times(0,\infty) \\ u_t(x,t)+H(x,Du(x,t))\ge 0 & \text{in } \overline{\Omega}\times(0,\infty). \end{cases}$$

ただし，$\overline{\Omega}$ は Ω の閉包を表す．まずこの問題に対する初期値問題の一意可解性と解の一様連続性が示され，さらに，次の主定理が与えられる．定数 c に対して，Ω において $H(x,Du)=c$ に対する状態拘束問題

$$\begin{cases} H(x,Du(x))\le c & \text{in } \Omega \\ H(x,Du(x))\ge c & \text{in } \overline{\Omega} \end{cases} \tag{5}$$

を考えるとき，粘性解 u を持つような定数 c は一意に定まる．この定数を c_H と表す．(2) において，H の代りに $H-c_H$ として得られる関数 d を d_{c_H} と表し，さらに，$c=c_H$ として，状態拘束問題 (5) に対する Aubry 集合 $\mathcal{A}_{c_H}$ を，(3) と同様に，$\mathcal{A}_{c_H}=\{y\in\overline{\Omega}\mid d_{c_H}(\cdot,y)$ は (5) の粘性解 $\}$ と定める．主定理は，(4) に対する非定常状態拘束問題の粘性解 u に対して，$t\to\infty$ とするとき，つぎのように $\overline{\Omega}$ 上で一様収束するという主張である．

$$u(x,t)+c_Ht \;\longrightarrow\; \min\{d_{c_H}(x,y)+v_f(x)\mid y\in\mathcal{A}_{c_H}\}.$$

ただし，$f=u(\cdot,0)$ とおくときに，関数 v_f は長時間挙動における初期値 f の寄与を与えるもので，

$$v_f(x)=\min\{d_{c_H}(x,y)+f(y)\mid y\in\overline{\Omega}\} \tag{6}$$

で定まる．

つぎに，ディリクレ境界条件の場合について，$\partial\Omega$ 上での境界値を $g(x)$ とし，粘性解の意味で境界値問題を考察する．ディリクレ条件

$$u(x,t) = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty)$$

の下でのハミルトン・ヤコビ方程式 (4) の粘性解を u とする．この問題に対する主定理は，$t \to \infty$ とするとき，臨界値 c_H の正負に応じて u がつぎのように $\overline{\Omega}$ 上で一様収束するというものである．

$c_H > 0$ の場合，$u(x,t) + c_H t \;\longrightarrow\; \min\{d_{c_H}(x,y) + v_f(y) \mid y \in \mathcal{A}_{c_H}\}$.

$c_H < 0$ の場合，$u(x,t) \;\longrightarrow\; \min\{d(x,y) + g(y) \mid y \in \partial\Omega\}$.

$c_H = 0$ の場合，$u(x,t) \;\longrightarrow\; \min\{d_{c_H}(x,y) + v_f(y) \mid y \in \mathcal{A}_{c_H}\}$
$\wedge \min\{d_{c_H}(x,y) + g(y) \mid y \in \partial\Omega\}$.

ここで，$f = u(\cdot, 0)$ であり，v_f は (6) で与えられる関数であり，d は (2) で与えられる関数である．記号 $a \wedge b$ で $\min\{a,b\}$ を表す．

第 3 章では，さらにディリクレ境界値 g が時間 t にも依存する場合を扱っている．そこでは，$g(x,t)$ が $t \to \infty$ とするときに，t の周期関数に漸近する場合に解の長時間漸近挙動に関する上述の定理と同様な結果を与えている．さらに，長時間漸近挙動の極限を記述する関数のもう一つの特徴付けを与えている．

このように，第 3 章において，著者は粘性解理論と弱 KAM 理論を駆使して，状態拘束問題とディリクレ問題に対して，解の長時間漸近挙動を明確に捉えることに成功している．特に，ディリクレ境界値問題の場合には，解の漸近挙動を臨界値 c_H により完全に分類し，極限関数の二通りの特徴付を与えるという極めて完成度の高い結果である．第 3 章で与えられた成果はハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動の解明に大きく寄与している．

以上のような内容の本論文は，ハミルトン・ヤコビ方程式という数学的にも，応用の面でも重要な偏微分方程式を扱い，その解の表現と長時間漸近挙動という基本的な問題について卓抜な成果を与え，偏微分方程式論とその応用に大いに貢献するものである．よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．

2009 年 1 月

審査員

主査	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	石井仁司
	早稲田大学教授	理学博士（東京大学）	大谷光春
	埼玉大学教授	理学博士（早稲田大学）	小池茂昭
	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	堤　正義
	早稲田大学教授	工学博士（京都大学）	西田孝明